本文目的：

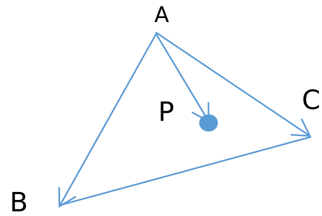
在计算机视觉中，经常需要判断一条射线是否与“三角形”相交。射线的起点 ***o*** 是相机镜头 **O** 在像平面的 2D 点，射线的另外一点 ***p*** 是“世界坐标系中的某个 3D 点 **P** 通过投影后在像平面上的 2D 点”。“三角形”是 3D 物体在像平面上“某个需求渲染表面的三角形小区域”。如果 ***p*** 在三角形上，意味着相机可以看见 3D 物体上的点 P，该三角形需要被渲染。

那么，如何判断射线是否与三角形相交呢？本文就是来阐述该问题。

作者：阮培源， 2022 年 2 月 13 日星期日

1、三角形 ABC 内的点 P 的性质

对于三角形 ABC 内的任意一点 P，学过线性代数和向量加法【两个向量相加等于两个向量组成的平行四边形的对角线向量】的就知道， 向量 AP 、 AB 、 AC 线性相关。



向量 AP 、 AB 、 AC 线性相关且点 P 在三角形 ABC 之内，可以写为下面形式【P 在三角形内，意味这 $0 <= u, v <= 1$， $u+v <= 1$ 】：

$$\overrightarrow{AP} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$$

注意： 如果 P 点不在三角形内， 那么是没法写为上面的向量相加的方程， 且满足 $0 <= u, v <= 1$ 和 $u+v <= 1$ 的约束条件的。

上面公式可以拆开写为：

$$A - P = u(A - B) + v(A - C)$$

得到：

$$P = (1 - u - v)A + uB + vC$$

这也是点 P 的表示方法：点 P 可以表示为点 A、B、C 分别乘以某个因子，然后相加。这里有约束条件： $0 <= u, v <= 1$ 且 $u+v <= 1$ 。

总结：如果点 P 在三角形内，那么 P 一定能写为 $P = (1 - u - v) A + u B + v C$ 的形式。

重心坐标： 当把 ABC 看成坐标系，始于 A 点，基为： 向量 AB 和 向量 AC 。这个坐标系叫做**重心坐标系**（barycentric，bary- 重的）。在重心坐标系中，有方程：

$$\overrightarrow{AP} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC}$$

继续写：

$$u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{PA} = 0$$

考虑二维三角形，拆一拆如下【下面方程中 $\overrightarrow{AB}_x$ ， 表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 x 轴上的投影】：

$$u\overrightarrow{AB}_x + v\overrightarrow{AC}_x + \overrightarrow{PA}_x = 0$$

$$u\overrightarrow{AB}_y + v\overrightarrow{AC}_y + \overrightarrow{PA}_y = 0$$

甚至我们还可以把它写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB}_x \\ \overrightarrow{AC}_x \\ \overrightarrow{PA}_x \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} u & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB}_y \\ \overrightarrow{AC}_y \\ \overrightarrow{PA}_y \end{bmatrix} = 0$$

实际上，我们可以看作是在寻找向量（u, v, 1）同时垂直于向量

$$(\overrightarrow{AB}_x, \overrightarrow{AC}_x, \overrightarrow{PA}_x)$$

和向量

$$(\overrightarrow{AB}_y, \overrightarrow{AC}_y, \overrightarrow{PA}_y)$$

这不就是叉乘么？同时这给了我们一个有了 P 点，求 u 和 v 的思路。

```
xvector = (B_x - A_x,  C_x - A_x,  A_x - P_x)
yvector = (B_y - A_y,  C_y - A_y,  A_y - P_y)
W = xvector 叉乘 yvector  ; 注意： 这里 W 是向量 [u, v, 1]，W 在 x-y-z 坐标系中的坐标值为[u, v, 1]
```

重点来了： 因为我们讨论的是二维的三角形， 如果 *W* 的 *z* 分量不等于 1 则说明 P 点不在三角形内。

因为我们的计算中涉及到浮点数，可能 *W* 的 z 分量不会一定等于 1.0 。
令 *W* 的三个分量是（a, b, c),我们代入原式子：

$$a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC} + c\overrightarrow{PA} = 0$$

$$P = (1 - a/c - b/c)A + a/cB + b/cC, c \neq 0$$

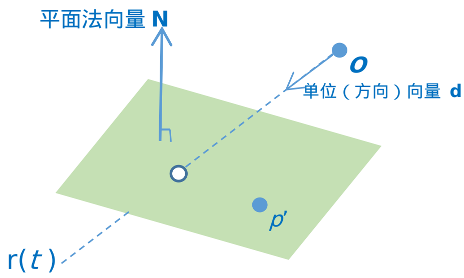
2、三角形 Möller-Trumbore 算法（下文简称为 M-T 算法）

Möller-Trumbore 算法的核心思想是一步到位的计算出光线是否与三角形相交，主要利用到的知识点是三角形的**重心坐标**。它是由 Tomas Moller 和 Ben Trumbore 于 1997 年在一篇题名为“Fast, Minimum Storage Ray/Triangle Intersection”的论文中介绍。

传统的“求三角形与光线是否相交的算法”比较繁琐比较慢，而 M-T 算法很直接很快。

2.1、传统求解射线是否与三角形相交的方法

首先看看用“循规蹈矩的笨方法”求一个三角形和光线相交的过程。



射线方程为： r (*t*) = ***O*** + *t* **d**， 0 <= *t* <= ∞ ；这里的射线 r (*t*) 其实是“有长度”其长度由 *t* 决定， 射线的起点是 ***O*** ，长度是“*t* 个单位向量 **d** 的模长”。 可以将 *t* 理解为“时间或是尺度因子”。 即：给定起点 ***O***，方向向量 **d**， 射线能射多远，就由 *t* 决定。“射线是否与平面相交的问题，也就看看是否有一个具体的 *t1*， 0 <= *t 1* <= ∞ ， 使得点 p = r (*t* 1) 在平面上。”

平面方程为： (*p* - *p*′) **. N** = 0， 即：给定一个法向量 **N**， 平面上的任意向量 (*p* - *p*′) 与 N 的内积等于 0。也可以理解为：给定法向量 **N** 和一点 *p*′， 那么满足(*p* - *p*′) **. N** = 0 的任意点 *p* 就确定了一个平面，该平面过点 *p*′，并且与向量 **N** 垂直。

有了上面的射线方程和平面方程，那么，判断一条射线 r (*t*)是否与平面相交的问题，就可以表示为对下面方程求解 *t* ，如果 *t* 在【0， +∞】内有解 t_1 ，那么就可以说射线 r (*t*)与平面相交。

假设 p ＝r (*t*)， 对下面方程求解 *t* 。

$$(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{N}=(\mathbf{o}+t\,\mathbf{d}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{N}=0$$

$$t=\frac{(\mathbf{p}'-\mathbf{o})\cdot\mathbf{N}}{\mathbf{d}\cdot\mathbf{N}}\qquad \textbf{Check: } 0\le t<\infty$$

基于上面的分析，我们可以知道，传统上判断射线是否与三角形相交时，可以分为两步：

第一步： 判断射线是否与【三角形所在】平面相交。当光线 r (*t*)与平面相交， 就有点 p 满足 (*p* - *p*′) **. N** = 0 ， 同时 *p* = **o** + *t* * **d** 。只有当(*p* - *p*′) **. N** = 0 才能满足 *p* 点在平面内。(*p* - *p*′)这个向量垂直于法线方向。

第二步： 确定射线与平面相交后，再求得其交点 *p*， 并判断该点是否在三角形内。

引出 MT 算法：

有没有一种直接直接判断三角形是否与光线相交的方法呢 ？M-T 算法就是这个活的！

2.2、M-T 算法

我们已经知道，点 P 可以写成三角形三个顶点乘上某个系数相加的形式：

$$P = aA + uB + vC; \text{ 其中 } 1 <= a \text{ 且 } u, v >= 0 \text{ 且 } a + u + v = 1$$

那么就可以写成：

$$o + t\mathbf{d} = aA + uB + vC$$

由于 $a + u + v = 1$ ，所以 $a = 1 - u - v$ ，所以，上式子可以继续写为：

$$\mathbf{o} + t\mathbf{d} = (1 - u - v) A + uB + vC$$
$$=> \mathbf{o} + t\mathbf{d} = A - uA - vA + uB + vC$$
$$=> \mathbf{o} + t\mathbf{d} = A + (B - A)u + (C - A)v$$
$$=> \mathbf{o} - A = -t\mathrm{d} + (B-A)\, u + (C-A)\, v$$

这样就有了三个未知数 t ，u，v 和一个方程：

$$\begin{bmatrix} -D & (B-A) & (C-A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = O - A$$

我们可以根据克莱姆法则(Cramer's rule)求解该问题，也就是：已知 A、B、C，可以根据克莱姆法则得到 D，然后根据上面方程求得 t ，u，v，如果 t ，u，v 满足下面条件，那么射线就与三角形相交。

条件 1：求得的 t 必须是一个大于 0 的数。

条件 2：求得的 u 和 v 必须是一非负的数且值小于等于 1。

条件 3：求得的 $v + u$ 必须是一个小于等于 1 的数。